DURÉE : 4 heures

Le but du problème est d'établir certaines propriétés des polynômes de Legendre et de montrer la convergence en moyenne quadratique (respectivement la convergence simple) des séries de Legendre associées à des fonctions continues par morceaux (respectivement Lipschitziennes).

Notations

Si I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et k un entier positif ou nul, on note $\mathcal{C}^0(I)$ (respectivement $\mathcal{C}^k(I)$) l'ensemble des fonctions continues (respectivement des fonctions k fois continûment dérivables) de I dans $\mathbb{R}$. La dérivée d'ordre k de f est notée $f^{(k)}$ ou $\dfrac{d^k f}{dx^k}$; $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ pourront être notées comme d'habitude respectivement f' et f''. On note $\mathcal{E}(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I, c'est à dire telles qu'il existe une subdivision $a_0 = \inf I < a_1 < \cdots < a_s < a_{s+1} = \sup I$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, $0 \leq i \leq s$ soit prolongeable par continuité à l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$.

Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{E}([-1,+1])$, on note

$$< f, g >= \int_{-1}^{+1} f(x)\, g(x)\, dx \quad \text{et} \quad \|f\| = \left(\int_{-1}^{+1} [f(x)]^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{1}$$

Pour tout entier $n \geq 0$ on note $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Pour toute fonction f de $\mathcal{C}^2(I)$, soit

$$Lf = \frac{d}{dx}\left[R \frac{df}{dx} \right] , \text{ avec } R(x) = x^2 - 1 .$$

On note $U_0(x) = P_0(x) = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$ soient U_n et P_n les fonctions polynomiales définies par

$$U_n(x) = (x^2 - 1)^n \quad \text{et} \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\, U_n^{(n)}(x) .$$

Partie I
Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathcal{P}_n$

1. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et tout polynôme P de $\mathcal{P}_n$, LP appartient à $\mathcal{P}_n$.

   (b) En déduire que la restriction de L à $\mathcal{P}_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{P}_n$ noté L_n. Calculer la matrice M_n de L_n relativement à la base $\{1, X, \cdots, X^n\}$ de $\mathcal{P}_n$.

   (c) Calculer les valeurs propres de L_n. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ les fonctions P_{2n} et P_{2n+1} sont respectivement paire et impaire.

   (b) Montrer que le polynôme P_n est de degré n. Si a_n désigne le coefficient de plus haut degré de P_n, montrer que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{n+1}$.

   (c) En utilisant une expression convenable de $[(x-1)^n (x+1)^n]^{(n)}$, montrer que $P_n(1) = 1$.

   (d) Calculer P_1 et P_2.

3. Pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel x, vérifier que :

$$\begin{aligned} U'_{n+1}(x) - 2(n+1)\,x\,U_n(x) &= 0, \\ (x^2-1)\,U'_n(x) - 2n\,x\,U_n(x) &= 0. \end{aligned}$$

   En dérivant $(n+1)$ fois les égalités précédentes, montrer que

$$P'_{n+1}(x) = x\,P'_n(x) + (n+1)\,P_n(x), \qquad (2)$$
$$LP_n = n(n+1)\,P_n. \qquad (3)$$

4. Quels sont les vecteurs propres de L_n ?

5. Pour tout entier $n \geq 1$ soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = P_n(x)^2 + \frac{(1-x^2)}{n(n+1)}\,[P'_n(x)]^2 .$$

   (a) En utilisant (3), montrer que la fonction f_n est croissante.

   (b) En déduire que pour tout $x \in [-1,+1]$, $|P_n(x)| \leq 1$.

Partie II
Base orthonormée de $\mathcal{P}_n$

1. Montrer que si $f \in \mathcal{E}([-1,+1])$, $\|f\| \leq \sqrt{2} \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et toute fonction f de $\mathcal{C}^2([-1,+1])$, $< Lf, P_n > = < f, LP_n > = n(n+1) < f, P_n >$.

   (b) Montrer que $< LP_m, P_n > = < P_m, LP_n >$ pour tout couple d'entiers m, n. En déduire que si m et n sont deux entiers distincts,

$$< P_n, P_m > = 0. \qquad (4)$$

   (c) Montrer que pour tout couple d'entiers tels que $0 \leq k < n$,

$$< X^k, P_n > = 0. \qquad (5)$$

3. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\int_{-1}^{+1} P'_{n+1}(x)\,P_n(x)\,dx = (n+1)\,\frac{a_{n+1}}{a_n}\,\|P_n\|^2 .$$

(b) Montrer que

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)^2\,dx = 2 - 2\int_{-1}^{+1} x\,P_n(x)\,P_n'(x)\,dx\,.$$

(c) En utilisant (2), en déduire que $\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.

4. Montrer que la famille de fonctions polynomiales $(\tilde{P}_n\,,\ n \geq 0)$ définies par

$$\tilde{P}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n \tag{6}$$

est orthonormale pour le produit scalaire $< .,. >$. Montrer que les polynômes $(\tilde{P}_k\,,\ 0 \leq k \leq n)$ forment une base orthonormée de $\mathcal{P}_n$.

5. Si L_n désigne l'endomorphisme de $\mathcal{P}_n$ défini en I 1 b, en déduire que pour tout polynôme P de $\mathcal{P}_n$,

$$\|L_n P\|^2 \leq n^2\,(n+1)^2\,\|P\|^2\,. \tag{7}$$

Partie III
Estimation des P_n

1. Pour tout entier $n \geq 1$, soit

$$Q_n(x) = (n+1)\,P_{n+1}(x) - (2n+1)\,x\,P_n(x)\,.$$

(a) Montrer que Q_n appartient à $\mathcal{P}_n$. Quelle est la parité de la fonction polynomiale Q_n ? Calculer $Q_n(1)$.

(b) En utilisant (5), montrer que $< X\,P_n\,,\,P_k >=< P_n\,,\,X\,P_k >= 0$ pour tout entier $k \leq n-2$.

(c) En déduire qu'il existe deux réels λ et μ tels que

$$Q_n(x) = \lambda P_n(x) + \mu P_{n-1}(x)\,.$$

(d) En utilisant les questions I 2 a et I 2 c, montrer que $\lambda = 0$, $\mu = -n$ et que l'on a :

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) - (2n+1)\,x\,P_n(x) + n\,P_{n-1}(x) = 0\,. \tag{8}$$

(e) Montrer que

$$P_{2n}(0) = (-1)^n\,\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\,.$$

2. Pour tout entier $n \geq 0$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt$.

(a) Montrer que $I_{2n} \leq I_{2n-1}$.

(b) Montrer que $(n+2)\,I_{n+2} = (n+1)\,I_n$.

(c) Calculer I_{2n} et I_{2n+1}.

(d) Déduire des questions a et c que pour tout entier $n \geq 1$, $|P_{2n}(0)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{\pi\,n}}$.

3. (a) Montrer que $(2n+2)\,P_{2n+2}(0) + (2n+1)\,P_{2n}(0) = 0$ pour tout entier $n \geq 0$.

   (b) En utilisant (2), en déduire que pour tout entier $n \geq 0$,

$$|P'_{2n+1}(0)| \leq 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,.$$

4. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\alpha_n : [-1,+1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\alpha_n(x) = \sqrt{1-x^2}\,P_n(x)$.

   (a) Montrer que sur l'intervalle $]-1,+1[$,

$$\alpha'_n(x)\sqrt{1-x^2} + x\,P_n(x) + (x^2-1)\,P'_n(x) = 0\,,$$

   puis - en utilisant (3) - que

$$\alpha''_n(x) + \varphi_n(x)\,\alpha_n(x) = 0 \text{ pour } \varphi_n(x) = \frac{1}{1-x^2}\left[n(n+1) + \frac{1}{1-x^2}\right].$$

   (b) Etudier le comportement de la fonction $\beta_n :]-1,+1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\beta_n(x) = [\alpha_n(x)]^2 + \frac{[\alpha'_n(x)]^2}{\varphi_n(x)}\,.$$

   (c) En utilisant les questions 2 d et 3 b, montrer que $\beta_n(0) \leq \dfrac{2}{\pi\,n}$.

   (d) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et tout x de $]-1,+1[$,

$$|P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi\,n\,(1-x^2)}}\,. \qquad (9)$$

Partie IV
Développement en séries de fonctions Lipschitziennes

Pour toute fonction f de $\mathcal{E}([-1,+1])$ et tout entier $n \geq 0$, soient

$$c_n(f) = < f\,,\,\tilde{P}_n > \quad \text{et} \quad d_n(f) = \inf\{\,\|f-P\|\,;\,P \in \mathcal{P}_n\}\,.$$

1. Soient f une fonction de $\mathcal{E}([-1,+1])$ et $n \geq 0$ un entier.

   (a) Montrer que pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\,\tilde{P}_k$ de $\mathcal{P}_n$,

$$\|f-P\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n}[c_k(f)]^2 + \sum_{k=0}^{n}[\lambda_k - c_k(f)]^2\,.$$

   (b) En déduire qu'il existe un unique polynôme $Q_n(f)$ de $\mathcal{P}_n$ tel que $\|f-Q_n(f)\| = d_n(f)$. Décomposer $Q_n(f)$ dans la base $(\tilde{P}_k\,,\,0 \leq k \leq n)$.

   (c) Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)^2$ est convergente et en déduire que la suite $c_k(f)$ converge vers une limite que l'on précisera.

2. En utilisant (8), montrer que pour des réels x et y distincts :

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\,P_k(x)\,P_k(y)\,(x-y) = (n+1)\,[\,P_{n+1}(x)\,P_n(y) - P_n(x)\,P_{n+1}(y)\,]\,. \qquad (10)$$

3. Soit f une fonction de $\mathcal{E}([-1,+1])$; pour tout entier $n \geq 0$, on note $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\,\tilde{P}_k$ et pour tout $x \neq y$

$$K_n(x,y) = \frac{n+1}{2} \times \frac{P_{n+1}(x)\,P_n(y) - P_n(x)\,P_{n+1}(y)}{x-y}\,.$$

(a) Montrer que K_n peut être prolongée par continuité en une fonction polynomiale à l'ensemble $[-1,+1]^2$; ce prolongement est encore noté K_n .

(b) Montrer que pour tout x de $[-1,+1]$,

$$S_n(f)(x) = \int_{-1}^{+1} K_n(x,y)\,f(y)\,dy\,.$$

(c) Si 1 désigne la fonction constante égale à 1, montrer que $c_0(1) = \sqrt{2}$, $c_k(1) = 0$ pour tout entier $k \geq 1$ et en déduire $\int_{-1}^{+1} K_n(x,y)\,dy = 1$.

(d) Montrer que pour tout $x \in [-1,+1]$,

$$S_n(f)(x) - f(x) = \int_{-1}^{+1} K_n(x,y)\,[f(y) - f(x)\,]\,dy\,. \qquad (11)$$

4. Soit C une constante strictement positive ; on dit que f est une fonction C-Lipschitzienne sur $[-1,+1]$ si :

$$\forall (x,y) \in [-1,+1]^2\,,\ |f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|\,.$$

Pour tout $x \in]-1,+1[$, soit $\varepsilon > 0$ tel que $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset]-1,+1[$ et soit σ_x^ε la fonction de $\mathcal{E}([-1,+1])$ définie par

$$\sigma_x^\varepsilon(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{x-y} & \text{si } \ y \in [-1, x-\varepsilon[\cup]x+\varepsilon, 1] \\ 0 & \text{si } \ y \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]\,. \end{cases}$$

(a) En utilisant (6) et (9) montrer que

$$\begin{aligned} |S_n(f)(x) - f(x)| \ \leq\ & \left|\int_{-1}^{+1} \tilde{P}_n(y)\,\sigma_x^\varepsilon(y)\,dy\right| \sqrt{\frac{n+1}{\pi\,(1-x^2)\,(2n+1)}} \\ & + \left|\int_{-1}^{+1} \tilde{P}_{n+1}(y)\,\sigma_x^\varepsilon(y)\,dy\right| \frac{n+1}{\sqrt{\pi\,(1-x^2)\,n(2n+3)}} \\ & + \sqrt{\frac{n+1}{n(1-x^2)}} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{2\,C}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,dy\,. \end{aligned} \qquad (12)$$

(b) En utilisant les résultats de la question 1 c, déduire de (12) que la suite $S_n(f)$ converge simplement vers f sur $]-1,+1[$.